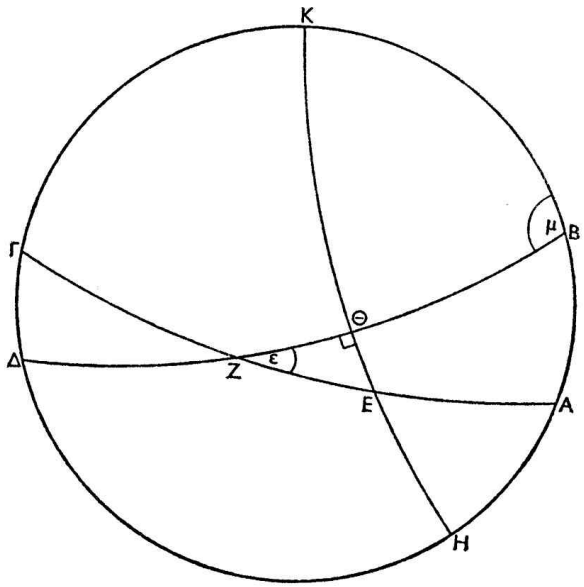
프톨레마이오스의 '알마게스트'가 제시하는 일식·월식 추보[1)]

최승언(서울대학교 명예교수)

1. 황도와 자오선과 만나는 각 μ



[그림 1] 황도와 자오선이 만나는 각 구하기

[그림 1]에서 자오선은 $AB\Gamma\Delta$, 황도는 ΔZB, 적도는 ΓZA, Z는 추분점이다. $K\Theta H$는 B를 중심으로하는 대원이다. $K\Theta=\mu$이고, $KE=90°$이다. $ZB=\lambda_e$라면 B의 황경은 $\lambda_B=\lambda_e+180°$이다. $Z\Theta=\lambda_e-90°=\lambda_B-270°$이고, $\Theta E=90°-\mu$이다. $\triangle Z\Theta E$에서 $\tan(\Theta E)=\sin(Z\Theta)\tan\varepsilon$이기에

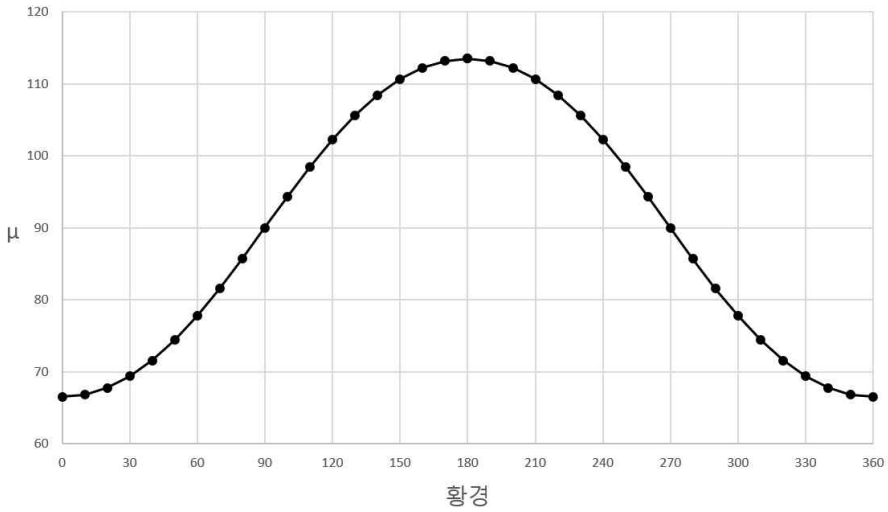
$$\cot\mu=-\cos\lambda_e\tan\varepsilon \quad (1\text{-}1)$$

혹은

$$\cot\mu=\cos\lambda_B\tan\varepsilon \quad (1\text{-}2)$$

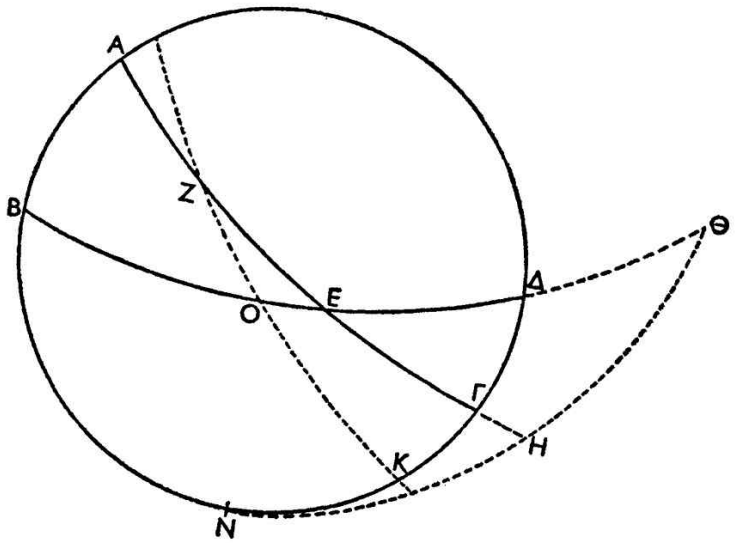
가 된다. $\varepsilon=23.5°$일 때, 춘분점에서 황도는 자오선과 $\mu=66.5°$로 만나고, 동·하지점은 $90°$, 추분점은 $113.5°$로 만난다.([그림 2] 참조)

1) 이 글은 Olaf Pedersen의 저서 A Survey of the Almagest(2010, Springer)에서 4~7장까지의 내용과 그림 중에 필요한 것들을 선택하여 오류를 바로 잡고, 내용을 보충하여 작성하였다.



[그림 2] $\varepsilon = 23.5°$일 때 황도와 자오선이 이루는 각 μ

2. 황도와 지평선이 이루는 각 ν



[그림 3] 황도와 지평선이 이루는 각 구하기

[그림 3]에서 $AB\Gamma\Delta$는 자오선, $BE\Delta$는 지평선, $AE\Gamma$는 황도이고, 황도 상의 점 E가 떠오르고 있다. $ZE = \lambda_h$는 떠오르는 점인 E의 Z(춘분점)로부터 황경이다. ZOK는 적도이다. N은 천저(Nadir)로 $NK = \phi$로 관측자의 위도이다. $\angle \Delta E\Gamma = \nu$라 하자. 이제 E를 중심으로 하는 대원을 그려 황도와 만나는 점을 H, 지평선과 만나는 점을 Θ라 하자. $EN = EH = E\Theta = 90°$이고, $\Theta N = 90°$이다. 따라서 $\angle \Delta E\Gamma = \nu = H\Theta$이다. 이제 구면삼각형 $\triangle N\Gamma H$에서 H가 직각이다. $\cos(N\Gamma) = \cos(\Gamma H)\cos(NH)$인데 $NH = 90° - H\Theta = 90° - \nu$이기에 $\sin\nu = \dfrac{\cos(N\Gamma)}{\cos(\Gamma H)}$가 된다.

적도 상의 O는 황도 상의 E가 떠 오를 때에 떠오른다. 사행구(oblique sphere)에서 위도 ϕ와 경도 경도 $ZE=\lambda_h$에 해당하는 $ZO=\vartheta(\lambda_h,\phi)$[2]를 구한 후에 지평선 제일 아래에 위치한 (in lower culmination) Γ의 적경인 $ZK=ZO+90°=\vartheta+90°=\alpha(\Gamma)$를 구한다. 이제 $\alpha(\Gamma)$에 해당하는 $\lambda(\Gamma)$[3]를 구한다. 그리고 $E\Gamma=Z\Gamma-ZE=\lambda(\Gamma)-\lambda_h$이고, $\Gamma H=90°-E\Gamma=90°-\lambda(\Gamma)+\lambda_h$이다. $N\Gamma=NK+K\Gamma$인데 $NK=\phi$, $K\Gamma=\delta(\Gamma)$[4]이기에 $N\Gamma=\phi+\delta(\Gamma)$이다. 따라서

$$\sin\nu(\lambda_h,\phi)=\frac{\cos(\phi+\delta(\Gamma))}{\sin(\lambda(\Gamma)-\lambda_h)} \qquad (2\text{-}1)$$

이다. $\lambda_h=\lambda_e+180°$이기에

$$\sin\nu(\lambda_h,\phi)=\frac{\cos(\phi-\delta(\lambda_e))}{\sin(\lambda(\Gamma)-\lambda_e)} \qquad (2\text{-}2)$$

가 된다. $\phi=37.5°$에서 지평선 위로 떠오르는 위치에서 황도가 지평선과 이루는 각 ν를 위 식을 이용하여 [표 1]과 같이 계산하고여 [그림 3]을 황경에 따른 변화를 그려 보았다.

---

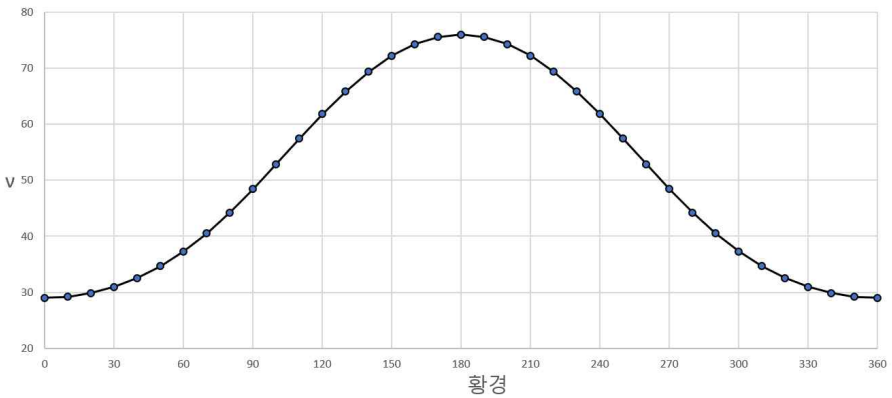
2) $\vartheta(\lambda_h,\phi)=\tan^{-1}(\tan\lambda_h\cos\varepsilon)-\sin^{-1}\left(\frac{\sin\lambda_h\sin\varepsilon\tan\phi}{\sqrt{1-\sin^2\lambda_h\sin^2\varepsilon}}\right)$

3) $\tan\lambda(\Gamma)=\frac{\tan\alpha(\Gamma)}{\cos\varepsilon}$

4) $\sin\delta(\Gamma)=\sin\lambda(\Gamma)\sin\varepsilon$

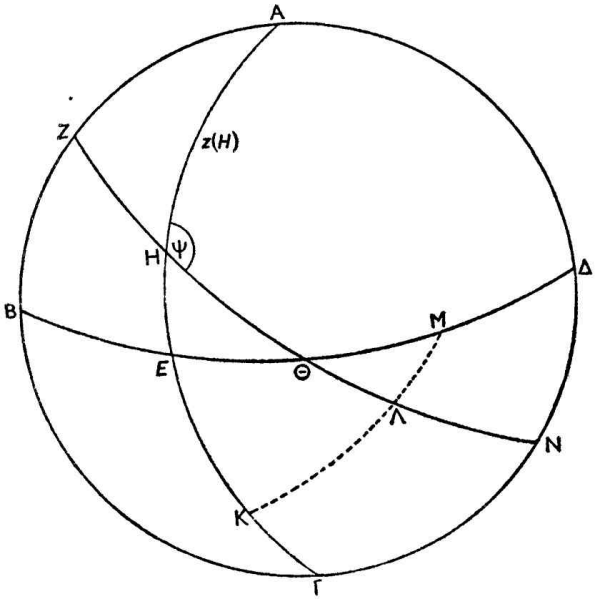
[표 1] $\phi = 37.5°$에서 지평선 위로 떠오르는 위치에서 황도가 지평선과 이루는 각 ν

λ_h 황경	$\vartheta(\lambda_h, \phi)$	$\alpha(\Gamma)$ 적경	$\lambda(\Gamma)$	ΓH	$\delta(\Gamma)$ 적위	$N\Gamma$	ν
0	0	90	90	0	23.5	61	29
10	6.132392	96.13239	95.62718	4.372818	23.38	60.88	29.21322
20	12.39435	102.3943	101.3944	8.605589	23.00988	60.50988	29.85975
30	18.9179	108.9179	107.4479	12.55207	22.35862	59.85862	30.95942
40	25.83842	115.8384	113.9452	16.0548	21.37253	58.87253	32.54244
50	33.29191	123.2919	121.0568	18.94321	19.97383	57.47383	34.6438
60	41.40647	131.4065	128.9618	21.03818	18.06245	55.56245	37.29333
70	50.2865	140.2865	137.8317	22.16826	15.52651	53.02651	40.50038
80	59.99061	149.9906	147.7971	22.20291	12.26896	49.76896	44.23455
90	70.50994	160.5099	158.8968	21.10322	8.25444	45.75444	48.40825
100	81.75797	171.758	171.0242	18.97581	3.566777	41.06678	52.87032
110	93.58158	183.5816	183.9045	16.09546	-1.55592	35.94408	57.41783
120	105.7928	195.7928	197.1405	12.85946	-6.74888	30.75112	61.82451
130	118.2082	208.2082	210.323	9.677017	-11.614	25.88596	65.8743
140	130.6815	220.6815	223.1468	6.85324	-15.8245	21.67546	69.38678
150	143.1186	233.1186	235.4688	4.531186	-19.1775	18.32245	72.22801
160	155.4781	245.4781	247.2979	2.702059	-21.5834	15.91657	74.30862
170	167.7617	257.7617	258.7497	1.250289	-23.0221	14.47786	75.57508
180	180	270	270	0	-23.5	14	76
190	192.2383	282.2383	281.2503	-1.25029	-23.0221	14.47786	75.57508
200	204.5219	294.5219	292.7021	-2.70206	-21.5834	15.91657	74.30862
210	216.8814	306.8814	304.5312	-4.53119	-19.1775	18.32245	72.22801
220	229.3185	319.3185	316.8532	-6.85324	-15.8245	21.67546	69.38678
230	241.7918	331.7918	329.677	-9.67702	-11.614	25.88596	65.8743
240	254.2072	344.2072	342.8595	-12.8595	-6.74888	30.75112	61.82451
250	266.4184	356.4184	356.0955	-16.0955	-1.55592	35.94408	57.41783
260	278.242	8.242034	368.9758	-18.9758	3.566777	41.06678	52.87032
270	289.4901	19.49006	381.1032	-21.1032	8.25444	45.75444	48.40825
280	300.0094	30.00939	392.2029	-22.2029	12.26896	49.76896	44.23455
290	309.7135	39.7135	402.1683	-22.1683	15.52651	53.02651	40.50038
300	318.5935	48.59353	411.0382	-21.0382	18.06245	55.56245	37.29333
310	326.7081	56.70809	418.9432	-18.9432	19.97383	57.47383	34.6438
320	334.1616	64.16158	426.0548	-16.0548	21.37253	58.87253	32.54244
330	341.0821	71.0821	432.5521	-12.5521	22.35862	59.85862	30.95942
340	347.6057	77.60565	438.6056	-8.60559	23.00988	60.50988	29.85975
350	353.8676	83.86761	444.3728	-4.37282	23.38	60.88	29.21322
360	360	90	450	0	23.5	61	29



[그림 4] $\phi = 37.5°$에서 지평선 위로 떠오르는 위치에서 황도와 지평선이 이루는 각 ν

3. 황도와 고도권이 이루는 각 Ψ



[그림 5] 황도와 고도권이 이루는 각 구하기

[그림 5]에서 $AB\Gamma\Delta$는 자오선, $BE\Delta$는 동쪽 지평선, $N\Theta HZ$는 황도이다. N은 황도에서 가장 위 정점이다. 황도 상의 점 H의 황경은 $\lambda(H)$이고, 적경은 $\alpha(H)$[5]이다.

1) H 위치가 남중하기 t시간 전이면 정점 Z의 $\alpha(Z)=\alpha(H)-t\times 15°$가 된다. 따라서 Z의 황경인 λ_e를 구한다.[6] 그리고 Z에서 적도를 따라 $90°$를 더가면 적경이 $\alpha(\Theta)=\alpha(Z)+90°$인 적도 상의 점이 떠오르는데 이에 해당하는 황도상의 점인 Θ의 황경인 λ_h를 구한다.[7] 따라서 $ZH=\lambda-\lambda_e$, $H\Theta=\lambda_h-\lambda$인 된다.

2) $\lambda(Z)=\lambda_e$를 이용하여 $\delta(Z)$를 구한다.[8] 그러면 Z의 고도는 $h(Z)=BZ=90°-\phi+\delta(Z)$가 된다.

3) $\triangle\Theta EH$에서 $\angle E$가 직각이기에 $\sin(EH)=\sin(\Theta H)\sin(\angle\Theta)$이고 $\triangle\Theta BZ$에서 $\angle B$가 직각이기에 $\sin(BZ)=\sin(\Theta Z)\sin(\angle\Theta)$이 된다. 두 식을 나누면 $\dfrac{\sin(EH)}{\sin(BZ)}=\dfrac{\sin(\Theta H)}{\sin(\Theta Z)}$이기에 $\sin h(H)=\sin h(Z)\dfrac{\sin(\lambda_h-\lambda)}{\sin(\lambda_h-\lambda_e)}$가 된다. $z(H)=90°-h(H)$, $z(Z)=90°-h(Z)$ 이기에

$$\cos z(H)=\cos z(\lambda,t,\phi)=\cos(\phi-\delta(Z))\frac{\sin(\lambda_h-\lambda)}{\sin(\lambda_h-\lambda_e)} \qquad (3\text{-}1)$$

---

5) $\tan\alpha(H)=\tan\lambda(H)\cos\varepsilon$

6) $\tan\lambda_e=\dfrac{\tan\alpha(Z)}{\cos\varepsilon}$

7) $\tan\lambda_h=\dfrac{\sin\alpha(\Theta)}{\cos\varepsilon\cos\alpha(\Theta)-\tan\phi\sin\varepsilon}$

8) $\sin\delta(Z)=\sin\lambda_e\sin\varepsilon$

을 얻는다. 이 식으로 H의 고도 혹은 천정거리를 구한다.

4) [그림 5]에서 H를 중심으로 데원을 그린다. 고도원과 만나는 점이 K, 황도와는 Λ에서 만나고, 지평선과는 M에서 만난다. $\angle EH\Theta = 180° - \Psi = K\Lambda$이다. $\angle E$가 직각인 $\triangle HE\Theta$에서 $\tan(EH) = \tan(H\Theta)\cos(180° - \Psi)$이기에

$$\cos\Psi(\lambda, t, \phi) = -\tan h(H)\cot(\lambda_h - \lambda) \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

혹은

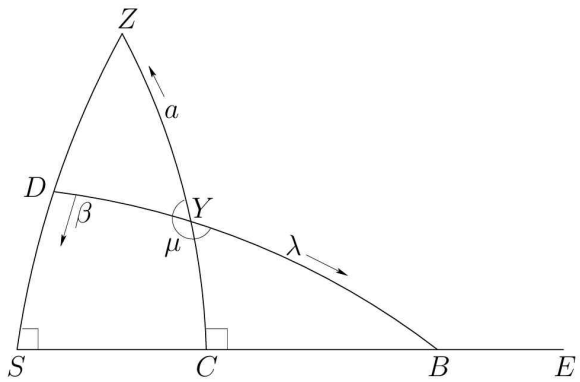
$$\cos\Psi(\lambda, t, \phi) = -\cot z(H)\cot(\lambda_h - \lambda) \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

가 된다. [표 2]는 $\phi = 36°$, $\varepsilon = 23°;51,20$, $\lambda = 90°$(게자리 시작)일 때, 위 식을 이용하여 시간에 따른 Ψ를 계산한 결과이다.

[표 2] $\phi = 36°$, $\varepsilon = 23°;51,20$, $\lambda = 90°$(게자리 시작)일 때, 시간에 따른 Ψ

t 시간	° 환산	Z 적경	Z 황경	Θ 적경	Θ 황경	ZΘ	HΘ	ZH	Z 적위	AZ	ZB	h(H)	z(H)	Ψ 동편	Ψ 서편
0	0	90	90.00	180.00	180.00	90.00	90.00	0.00	23.86	12.14	77.86	77.86	12.14	90.00	90.00
1	15	75	76.23	165.00	167.60	91.37	77.60	13.77	23.13	12.87	77.13	72.25	17.75	133.39	46.61
2	30	60	62.16	150.00	155.28	93.11	65.28	27.84	20.96	15.04	74.96	61.46	28.54	147.85	32.15
3	45	45	47.55	135.00	143.06	95.51	53.06	42.45	17.36	18.64	71.36	49.54	40.46	151.84	28.16
4	60	30	32.26	120.00	130.94	98.67	40.94	57.74	12.47	23.53	66.47	37.42	52.58	151.91	28.09
5	75	15	16.33	105.00	118.78	102.45	28.78	73.67	6.53	29.47	60.53	25.42	64.58	149.91	30.09
6	90	0	0.00	90.00	106.37	106.37	16.37	90.00	0.00	36.00	54.00	13.75	76.25	146.40	33.60
7	105	-15	-16.33	75.00	93.38	109.71	3.38	106.33	-6.53	42.53	47.47	2.65	87.35	141.47	38.53
7.25	108.74	-18.74	-20.35	71.26	-90.00	-69.65	-180.00	110.35	-8.09	44.09	45.91	0.00	90.00	140.01	39.99

A Modern Almagest[9]는 Ψ를 구하는 식을 제공하고 있는데 그 순서는 다음과 같다.



[그림 6]

[그림 6]에서 $SCBE$는 지평선이고, DYB는 황도가 된다. ZDS는 자오선이고, ZYC는 고도권이다. D는 자오선에 남중하는 황도의 점이다. S는 남쪽, E는 동쪽이다. Y에 위치한 황도상의 점의 황경을 λ라 하면, 황도와적도가 이루는 각이 ε일 때, Y의 적도 좌표는

9) Richard Fitzpatrick(University of TexasatAustin), A Modern Almagest, 31, 32쪽 https://farside.ph.utexas.edu/Books/Syntaxis/Almagest.pdf

$$\sin\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon \quad (3\text{-}3\text{-}1)$$
$$\tan\alpha = \tan\lambda \cos\varepsilon \quad (3\text{-}3\text{-}2)$$

으로 구한다. α_0가 D점의 적경이라 하면, $\alpha_0 = \alpha - t$가 된다. 여기서 t는 시간각을 도수로 나타낸 것이다. 이 때 Y의 지평좌표는

$$\sin a = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos t \quad (3\text{-}4\text{-}1)$$
$$\tan A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos\phi \sin\delta - \sin\phi \cos\delta \cos t} \quad (3\text{-}4\text{-}2)$$

가 된다. 또한 Ψ는

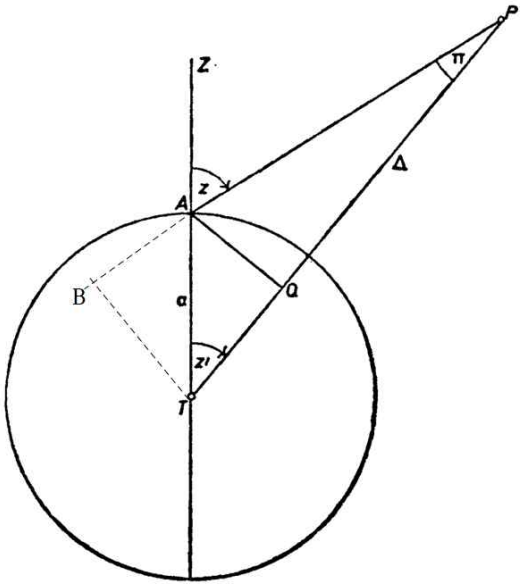
$$\cos\Psi = -\cos A \sin\varepsilon \cos\alpha_0 - \sin A \{\cos\phi \cos\varepsilon + \sin\phi \sin\varepsilon \sin\alpha_0\} \quad (3\text{-}5)$$

로 구할 수 있다. [표 3]은 $\phi = 36°$, $\varepsilon = 23°;51,20$, $\lambda = 90°$(게자리 시작)일 때, 시간에 따른 Ψ를 A Modern Almagest에 주어진 식으로 계산한 결과이다. [표 2]의 결과와 동일하다.

[표 3] $\phi = 36°$, $\varepsilon = 23°;51,20$, $\lambda = 90°$(게자리 시작)일 때, 시간에 따른 Ψ를 A Modern Almagest에 주어진 식으로 계산한 결과

t	α0	a	z	A 북 기준	A 남 기준	Ψ동편	Ψ서편
0	90	77.86	12.14	180.00	0.00	90.00	90.00
1	75	72.25	17.75	129.06	-50.94	133.39	46.61
2	60	61.46	28.54	106.83	-73.17	147.85	32.15
3	45	49.54	40.46	94.68	-85.32	151.84	28.16
4	30	37.42	52.58	85.78	-94.22	151.91	28.09
5	15	25.42	64.58	77.98	-102.02	149.91	30.09
6	0	13.75	76.25	70.32	-109.68	146.40	33.60
7	-15	2.65	87.35	62.17	-117.83	141.47	38.53
7.25	-18.74	0.00	90.00	60.01	-119.99	140.01	39.99

4. 달의 시차



[그림 7] 지구에서 가까운 천체의 시차

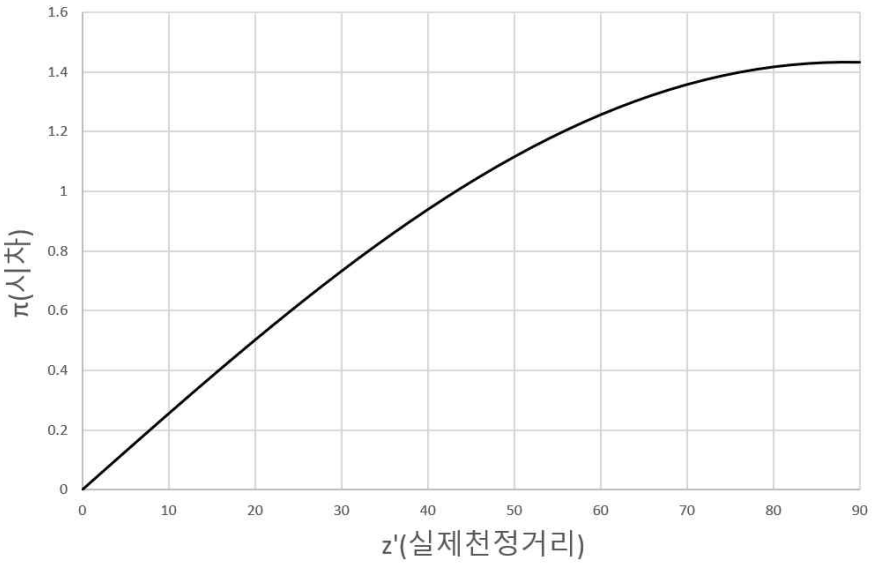
[그림 7]에서 z는 천체의 관측자 천정 거리, z'는 지구 중심에서 본 실제 천정 거리이다. π는 시차가 된다. 따라서 $\pi = z - z'$, $TQ = a\cos z'$, $QA = a\sin z' = AP\sin\pi$, $QP = AP\cos\pi = a\sin z'\cot\pi$ 이기에 $\Delta = TP = TQ + QP = a(\cos z' + \sin z'\cot\pi)$이 되고 이 식을 정리하면

$$\tan\pi = \frac{a\sin z'}{\Delta - a\cos z'} \qquad (4\text{-}1)$$

가 된다. 만약 $a/\Delta \ll 1$이면 $\sin\pi \cong \frac{a\sin z'}{\Delta - a\cos z'}$으로 어림된다. 다시 $TB = PT\sin\pi = a\sin z$에서 $\Delta = \frac{a\sin z}{\sin\pi}$이기에

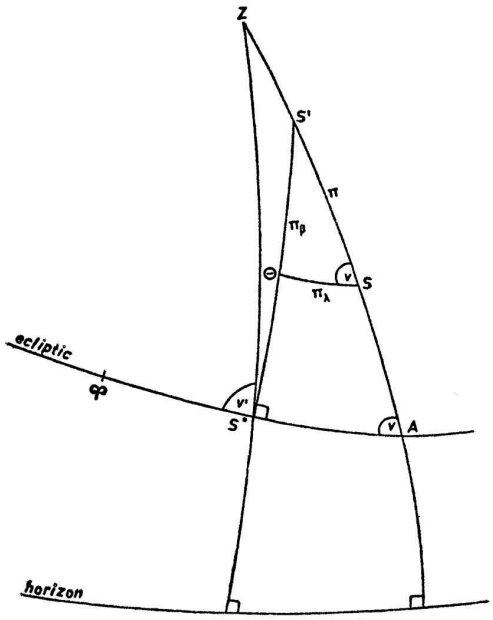
$$\sin\pi = \frac{a\sin z}{\Delta} \qquad (4\text{-}2)$$

가 된다. $a = 1^r$, $z' = 49^\circ;48$, $\pi = 1^\circ;7$이면 $\Delta = 39^r;45$가 되며, $z = 50^\circ;55$이다. [그림 8]은 $\Delta = 40^r$일 때 실제천정거리 z'와 시차 π와의 관계이다.



[그림 8] $\Delta = 40''$일 때 실제천정거리 z'에 따른 시차 π

5. 경도와 위도의 시차



[그림 9]

[그림 9]에서 천체의 실제 위치는 S'인데 관측 위치는 S이다. π는 천체까지 거리가 상대적으로 가깝워서 지구의 중심과 관측자와의 거리가 있기에 생기는 시차이다. 달은 다른 천체들보다 가까워서 시차를 고려해 주어야 한다. 태양의 경우는 이 시차각이 기껏해야 10초 이내이다. 더군다나 별의 경우에는 별이 너무 멀어 시차각이 0이다.

그러나 달의 경우는 이 시차로 인해 황도 좌표의 λ, β에 변화를 준다. 월식일 때에는 지구그림자와 달이 거의 같은 거리에 위치해 있기에 지구그림자와 달의 시차각이 같다. 배경이 되

는 천체에 대한 위치는 이 시차로 인해 변하지만 전체적인 월식이 일어나는 모습은 실제 모습이나 관측 모습이나 같다. 그러나 일식의 경우는 다르다. 달은 시차가 크지만 태양은 시차가 아주 작기에 일식이 일어나는 모습은 실제 모습과 관측 모습이 다르다.

[그림 9]에서 $ZS' = z'$, $ZS = z$, $S'S = \pi$이다. 고도원은 황도와 A에서 만난다. 그러나 S'를 지나고 황도와 수직으로 만나는 대원은 S^*에서 황도와 만난다. $\Upsilon S^* = \lambda$, $S^*S' = \beta$이다. 황도와 평행하고, S를 지나는 소원이 S^*S' 대원과 만나는 점이 Θ이다. $\triangle S'S\Theta$를 시차삼각형이라 부르는데 거의 평면삼각형과 같다. $\pi = S'S$는 고도에 평행한 시차이이기에 $\pi_\lambda = S\Theta = \pi\cos v$는 황경에 평행한 시차이며, $\pi_\beta = S'\Theta = \pi\sin v$는 황위에 평행한 시차이다.

S'의 황도 좌표가 (λ, β)이면 S^*의 S의 황도 좌표는 각각 $(\lambda, 0)$, $(\lambda + \pi_\lambda, \beta - \pi_\beta)$가 된다. 그리고 [그림 9]에서 $v = v' - \angle AZS^*$인 관계가 있다. 그런데 $\triangle ZS^*S'$에서 $ZS' = z'$, $S^*S = \beta$, $\angle ZS^*S' = 90° - v'$이 되기에 $\cos z' = \cos\beta\cos(ZS^*) + \sin\beta\sin(ZS^*)\cos(90° - v')$이다. 이를 정리하면

$$\cos z' = \cos\beta\cos(ZS^*) + \sin\beta\sin(ZS^*)\sin v' \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

혹은

$$ZS^* = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta\sin^2 v'}}\right) + \sin^{-1}\left(\sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta\sin^2 v'}\cos z'\right) \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

가 된다. v'를 알면 (5-1-2)식으로부터 ZS^*를 구할 수 있다. 또한 $\angle S'ZS^*$를 구하려면

$$\cos\beta = \cos z'\cos(ZS^*) + \sin z'\sin(ZS^*)\cos(\angle S'ZS^*) \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

혹은

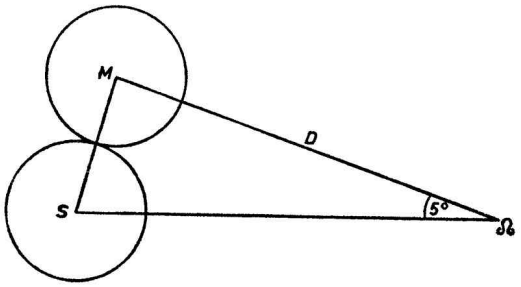
$$\angle S'ZS^* = \cos^{-1}\left\{\frac{\cos\beta - \cos z'\cos(ZS^*)}{\sin z'\sin(ZS^*)}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

을 이용한다. 만약 $\beta \ll 1$이면 $\cos\beta \simeq 1$, $\sin\beta \simeq 0$이기에 $ZS^* \simeq z'$, $\angle S'ZS^* \simeq 0$으로 어림되기에 $v = v' - \angle AZS^* \simeq v'$가 된다. 달의 경우, β가 5° 이내로 작기에 $\sin 5° = 0.087$, $\cos 5° = 0.996$이기에 $v \simeq v'$으로 어림할 수 있다. 따라서 S의 황도 좌표는

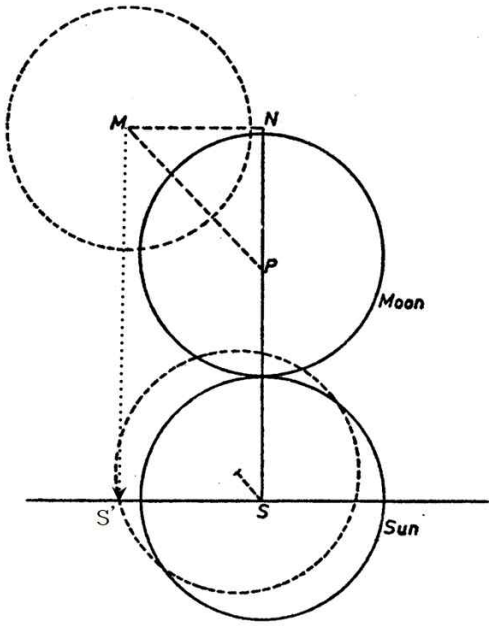
$$(\lambda + \pi\cos v, \beta - \pi\sin v) \simeq (\lambda + \pi\cos v', \beta - \pi\sin v') \qquad (5\text{-}3)$$

가 된다.

6. 시차의 영향



[그림 10] 시차를 무시(일식일 때)



[그림 11] 시차의 영향(일식일 때)

[그림 10]을 보면 태양과 달이 서로 접해서 관측되고 있다. 태양과 달의 시차와 가감차를 무시하고 일식의 한계를 생각해 보자. [그림 10]에서 태양의 시반경은 거의 일정하고, 달의 시반경이 최대 일 때, $SM = 0°;15,40(\text{태양}) + 0°;17,40(\text{달의 최대 시반경}) = 0°;33,20$이기에 $☊S = \frac{0°;33,20}{\sin 5°} = 6°;22,27$이 된다. 그러나 [그림 11]을 보면 달의 시차가 태양의 시차보다 훨씬 크다. 여기서는 태양의 시차 영향은 무시한다. 점선으로 그려진 달과 태양은 실제 위치이다. 이제 $MP = \pi$라 하면 $NP = \pi_\beta$, $MN = \pi_\lambda$이다. 관측된 일식에서는 두 천체의 중심의 황경이 같다. 그리고 $SP = 0°;15,40(\text{태양}) + 0°;17,40(\text{달의 최대 시반경}) = 0°;33,20$이기에 $SN = SP + PN = 0°;33,20 + \pi_\beta$가 된다. 이제 N이 가장 가까운 교점으로부터 거리는 $☊S = \frac{SN}{\sin 5°}$이고, $☊S = \frac{SN}{\sin 5°} + MN$이기에 $☊S' = \frac{0°;33,20 + \pi_\beta}{\sin 5°} + \pi_\lambda$가 된다.

이제 교점에서 최대로 떨어진 거리를 구하기 위해서 태양과 달의 최대 가감차는 각가 $q_{\max,\odot} = 2°;23$, $q_{\max,☽} = 5°;1$이기에 이를 합하면 $7°;24$이 된다. 만약 달이 태양을 뒤따르면, 달이 태양을 따라붙는데 $0°;37$를 더 가야 한다. 따라서 실제 합일 때, 실제 태양이 평균 태양에 대해 $2°;23 + 0°;37 = 3°$ 떨어져 있어도 일식이 가능하다. 따라서 일식이 발생하는 절대 한계는

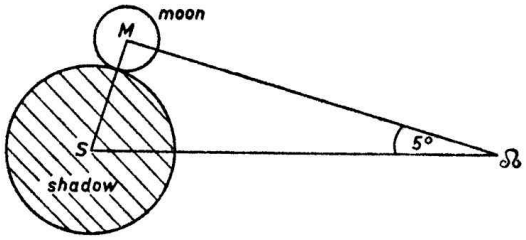
$$L_\odot = \frac{0°;33,20 + \pi_\beta}{\sin 5°} + \pi_\lambda + 3° \quad (6)$$

이 된다. 시차가 모두 관측자의 위도에 따라 달라지기에 $L_\odot$의 한계도 달라진다.([표 4] 참조)

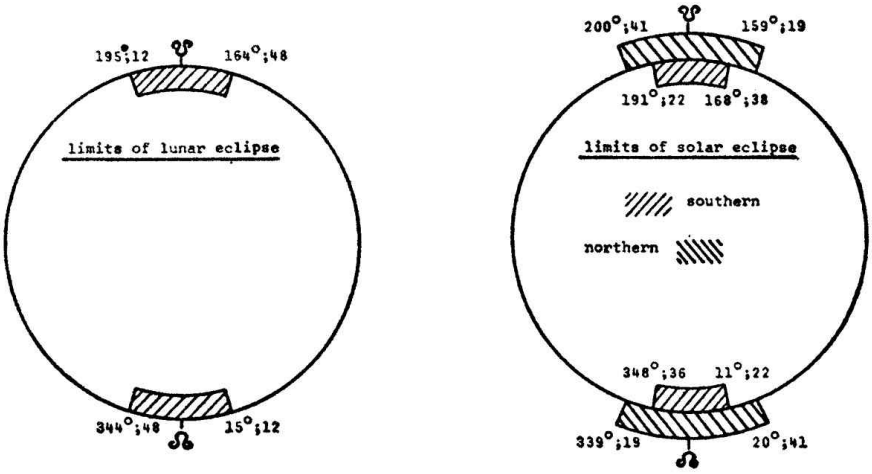
[표 4] 위도에 따른 $L_\odot$의 한계

	Borysthenes	Meroë
최대 낮 길이	16^h	13^h
위도	48°;32	16°;27
π_λ의 최대	0°;15	0°;30
π_β의 최대	0°;58	0°;08
$L_\odot$의 한계	20°;41	11°;22

월식의 경우에는 달과 지구 그림자의 거리가 같기에 시차를 고려하지 않아도 된다. 물론 시차로 인해 지구 중심에서 월식을 보는 모습과 관측자가 보는 모습이 같지만 전체 모습이 배경 별에 대해서 그 위치는 다르다. 달의 최대 시반경일 때 그에 해당하는 지구 그림자의 시반경은 각각 $0°;17,40$, $0°;45,56$이다. 두 합은 $1°;3,36$이다. 따라서 $☊S = \frac{1°;3,36}{\sin 5°} = 12°;9,44$이기에 월식의 한계는 앞에서 고려한 $3°$를 더하여 $15°;9,44$가 된다.



[그림 12] 월식의 경우



[그림 13] 월식과 일식의 한계

[그림 13]은 월식과 일식의 한계를 승교점과 강교점에 표시한 것이다. 예를 들어 월식이 승교점 근처 $-15°;12 < \lambda_{d,1} = \lambda_{\beta,1} + 90° < 15°;12$에서 발생하였다고 하자. 6번의 삭망월 $(177^d;11)$ 후에 $\lambda_{\beta,2} = \lambda_{\beta,1} + \omega_d \times 177^d;11 = \lambda_{\beta,1} + 184°;1,24$가 된다. 따라서 $\lambda_{d,2} = \lambda_{d,1} + 184°;1,14$이 되고, $168°;49,24 < \lambda_{d,2} < 15°;12 + 184°;1,24 = 199°;13,24$되기에 $168°;49,24 < \lambda_{d,2} < 195°;12$이면 월식이 일어나고, 그 밖에는 월식이 일어나지 않는다. 5번의 삭망월 후에도 월식이 일어 날 때도 있고, 아닐 때도 있다. 그러나 7번의 식망월 후에는 월식 절대로 일어나지 않는다.

북쪽 지방에서 일식의 경우 5, 6, 혹은 7번 삭망월 후에는 일식이 일어날 수 있지만 남쪽 지방의 경우에는 6번 삭망월 후에나 일식이 일어날 수 있다.

7. 평균 합과 충

태양과 달의 평균 합(conjunction)과 충(opposition)을 구하려면 먼저 태양과 달의 평균 운행을 구하여야 한다. 즉

$$\lambda_{m,\odot}(t) = \lambda_{m,\odot}(t_0) + \omega_{\odot}(t - t_0) \qquad (7\text{-}1\text{-}1)$$
$$\lambda_{m,☽}(t) = \lambda_{m,☽}(t_0) + \omega_{☽}(t - t_0) \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

이다. 여기서

$$\text{역원 때 태양의 평균 황경: } \lambda_{m,\odot}(t_0) = 330°;45 \qquad (7\text{-}2\text{-}1)$$
$$\text{역원 때 달의 평균 황경: } \lambda_{m,☽}(t_0) = 41°;22 \qquad (7\text{-}2\text{-}2)$$
$$\text{태양의 일 평균 각속도: } \omega_{\odot} = 0°;59,08,17,13,12,31\,/\text{일} \qquad (7\text{-}2\text{-}3)$$
$$\text{달의 일 평균 각속도: } \omega_{☽} = 13°;10,34,58 \qquad (7\text{-}2\text{-}4)$$
$$\text{역원: } t_0 = Nabonassar\ \text{원년} = \text{기원전}\ 747\text{년}\ 2\text{월}\ 26\text{일 정오}(noon) \qquad (7\text{-}2\text{-}5)$$

이다. 참고로

$$\text{역원 때 달의 평균 이각: } \lambda_{m,☽}(t_0) - \lambda_{m,\odot}(t_0) = 70°;37 \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$
$$\text{역원 때 달의 평균 원지점 이각: } a_m(t_0) = 268°;49 \qquad (7\text{-}2\text{-}7)$$
$$\text{역원 때 달의 최대 상승점 이각; } \lambda_{m,\beta}(t_0) = 354°;15 \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

이다. 평균 합이 일어나는 시각을 t_n이라 하면

$$\lambda_{m,☽}(t_n) = \lambda_{m,\odot}(t_n) + 360°(n-1),\ \ n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (7\text{-}3)$$

이다. (7-1-1, 2)식을 (7-3)식에 대입하여 정리하면

$$t_n = t_0 + \frac{\lambda_{m,\odot}(t_0) - \lambda_{m,☽}(t_0) - 360°}{\omega_{☽} - \omega_{\odot}} + \frac{360°}{\omega_{☽} - \omega_{\odot}} n \qquad (7\text{-}4)$$

가 된다. (7-2-1, 2, 3, 4)를 대입하면

$$t_n = t_0 - 5^d;47,33 + n \times 29^d;31,50,08,20 \qquad (7\text{-}5)$$

이 된다. 즉 역원 후 첫 번째 합(conjunction)은 $23^d;44,17$에 일어났다. 마찬가지로 평균 충이 T_n에 일어났다면

$$\lambda_{m,☽}(T_n) = \lambda_{m,\odot}(T_n) + 360°(n - 3/2) \qquad (7\text{-}6)$$

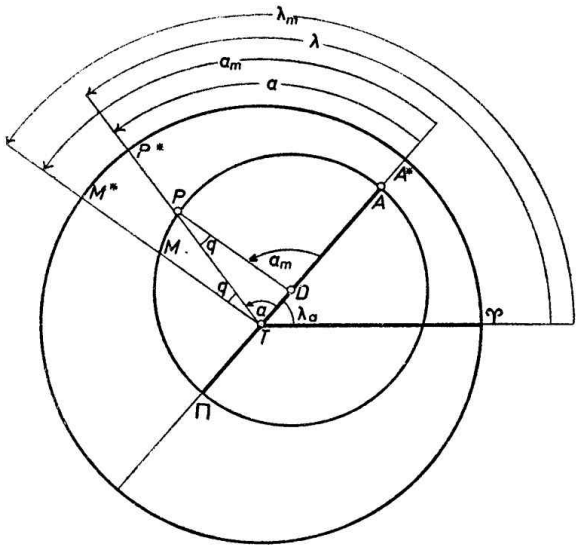
인데, 이를 정리하면

$$T_n = t_0 + \frac{\lambda_{m,\odot}(t_0) - \lambda_{m,☽}(t_0) - 180°}{\omega_☽ - \omega_\odot} + \frac{360°}{\omega_☽ - \omega_\odot}(n-1) \qquad (7\text{-}7)$$

$$T_n = t_0 + 9^d;58,22 + (n-1) \times 29^d;31,50,08,20 \qquad (7\text{-}8)$$

이다. 따라서 즉 역원 후 첫 번째 충(opposition)은 $9^d;58,22$에 일어났다.

8. 태양의 실제 황경



[그림 14] 프톨레마이오스의 이심 모델

[그림 14]는 프톨레마이오스의 이심 모델(eccentric model)이다. 이 모델에서 태양의 실제 황경을 구하기 위해서는 태양의 평균 원지점 이각 $a_{m,\odot}$과 이 값에 따른 가감차(equation of center) $q_\odot$를 구해야 한다. 이심 모델에 의하면

$$a_{m,\odot}(t) = \lambda_{m,\odot}(t) - \lambda_{a,\odot} \qquad (8\text{-}1)$$

$$q_\odot = \tan^{-1}\left\{-\frac{E\sin(a_{m,\odot})}{1+E\cos(a_{m,\odot})}\right\} \qquad (8\text{-}2)$$

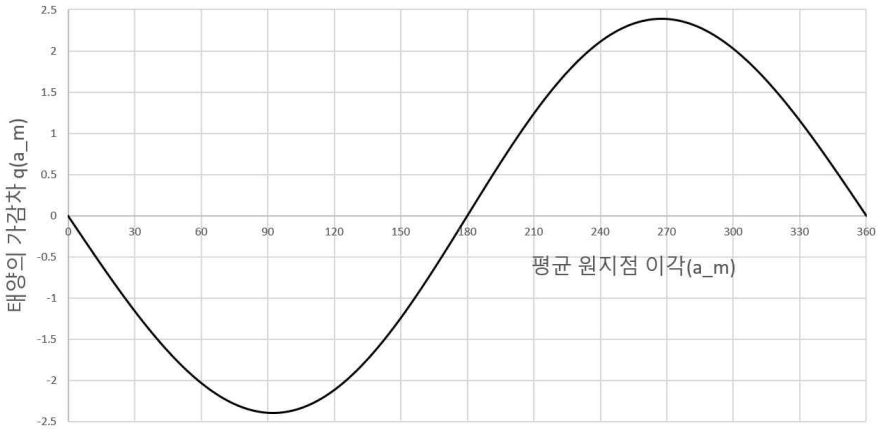
이 된다. 히파르코스는 $\lambda_{a,\odot} = 65°;30$, $E = 1/24$를, 프톨레마이오스는 $\lambda_{a,\odot} = 65°;30$, $E = 0.04175$를 사용했다. (7-10)식은 $\cos(a_{m,\odot}) = -E$일 때 최댓값, 최솟값 $\pm 2°;23,34$을 갖는다. 프톨레마이오스의 태양 모델에서는 원지점 이동을 고려하지 않았다.

태양의 실제 황경 $\lambda_\odot(t)$과 그 시각에서 실제 각속도 $\dot{\lambda}_\odot$은

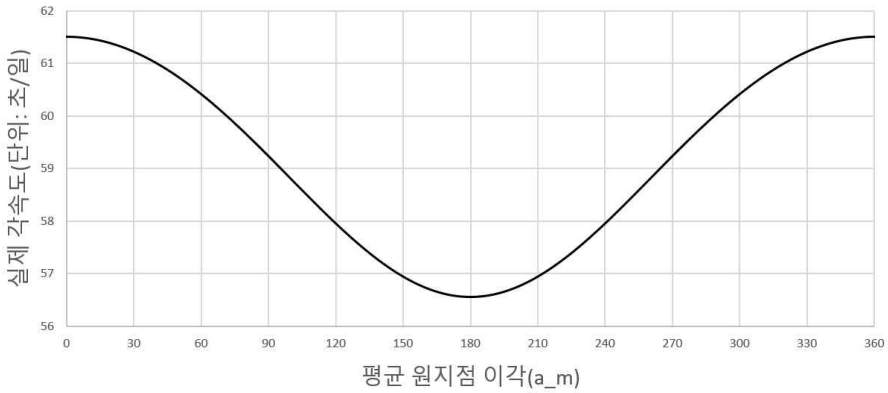
$$\lambda_\odot(t) = \lambda_{m,\odot}(t) + q_\odot(a_{m,\odot}) \qquad (8\text{-}3)$$

$$\dot{\lambda}_{\odot}(t) = \omega_{\odot} + \dot{q}_{\odot}\{a_{m,\odot}(t)\} = \omega_{\odot}\left\langle 1 + \frac{E[E + \cos\{a_{m,\odot}(t)\}]}{1 + E^2 + 2E\cos\{a_{m,\odot}(t)\}} \right\rangle \qquad (8\text{-}4)$$

이 된다. [그림 15]와 [그림 16]은 $E = 0.04175$일 때 $a_{m,\odot}$에 따른 태양의 가감차(equation of center) 및 1일 실제 각속도를 그린 것이다. 원지점과 근지점에서는 가감차는 0이지만 실제 각속도는 각각 최대, 최소가 된다. 즉 원지점에서 천천히, 근지점에서 빠르게 태양이 운행한다.

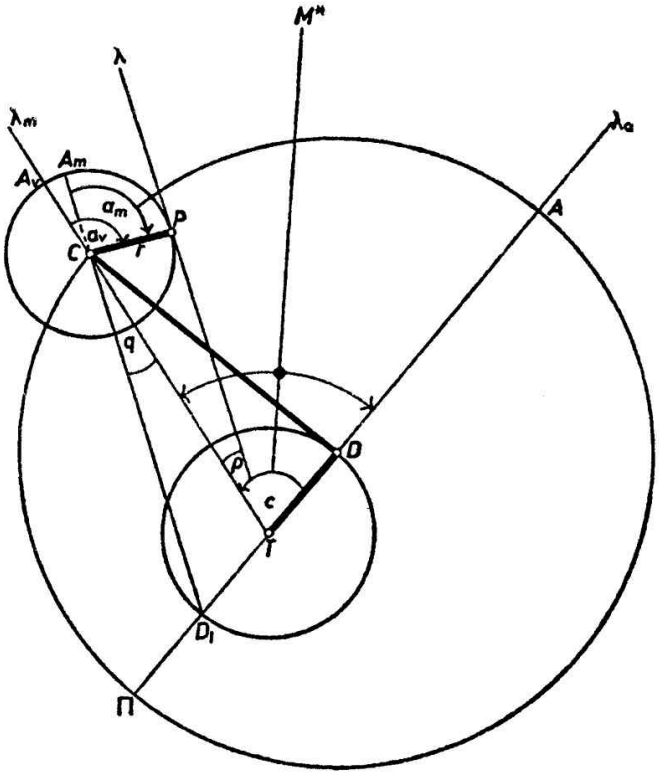


[그림 15] 태양의 가감차 $q_{m,\odot}$



[그림 16] 평균 원지점 이각에 따른 실제 각속도(단위: 초/일)

9. 달의 실제 경도



[그림 17] 프톨레마이오스의 세 번째 모델

달의 운행과 관련된 각속도는 다음과 같다.

달이 태양에서 멀어지는 평균 각속도: $\omega_S = 12°;11,26,41,20,17,19$ /일 (9-1-1)
달이 원지점에서 멀어지는 평균 각속도: $\omega_a = 13°;03,53,56,17,51,59$ /일 (9-1-2)
달이 교점에서 멀어지는 평균 각속도: $\omega_d = 13°;13,45,39,48,56,37$ /일 (9-1-3)
달이 운행하는 평균 각속도: $\omega_t = 13°;10,34,58,33,30,30$ /일 (9-1-4)

[그림 17]은 프톨레마이오스가 제시한 세 번째 달 모델이다. T에 지구가 있다. 실제 달은 P의 위치에 있다. 그리고 A는 이심원 $ACΠ$의 원지점인데 경도는 λ_a이다. $\angle CTA = c = 2(\lambda_{m,☽} - \lambda_{m,☉})$이며 달과 태양 사이의 이각의 2배이다. [그림 16]에서 $\angle CTA = c = \lambda_{m,☽} - \lambda_a$이기에 $\lambda_{m,☉} - \lambda_a = \lambda_{m,☽} - \lambda_{m,☉} = c/2$이다. [그림 17]에서 평균 태양의 위치는 M^*이다.

또한 달의 평균 경도 $\lambda_{m,☽}$는, $\omega_☽ = \omega_t$, $t - t_0 = \Delta t$라 놓으면

$$\lambda_{m,☽} = \lambda_{m,☽}(t_0) + \omega_t \Delta t \quad (9\text{-}1)$$
$$\lambda_a = 2\lambda_{m,☉} - \lambda_{m,☽} \quad (9\text{-}2)$$

가 된다.

평균 원지점 이각 a_m과 실제 원지점 이각 a_v는

$$a_m = a_{m,0} + \omega_a (t - t_0) \quad (9\text{-}3)$$
$$a_v = a_m + q \quad (9\text{-}4)$$

의 관계가 있다.

이제 $TC = \rho$, $CD = R$, $TD = e$라 하면 $R^2 = \rho^2 + e^2 + 2e\rho\cos c$이기에

$$\rho(c) = \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 c} + e\cos c \quad (9\text{-}5)$$

가 된다. 따라서 $\triangle TD'C$에서

$$\tan q(c) = \frac{e\sin c}{\rho(c) + e\cos c} \quad (9\text{-}6)$$

로 $q(c)$를 구해 (9-4)식을 이용해 a_v를 구한다. 이제 $\triangle TPC$에서 $CP = r$이기에

$$\tan p(c, a_v) = -\frac{r\sin a_v}{\rho(c) + r\cos a_v} \quad (9\text{-}7)$$

로 $p(c, a_v)$를 구하면 달의 실제 경도 $\lambda_☽$는

$$\lambda_☽ = \lambda_{m,☽} + p(c, a_v) \quad (9\text{-}8)$$

이 된다. 이 값은 달의 궤도에서 춘분점으로부터 경도 즉 백경(白經)이다. 황도와 백도의 기울기는 5도 정도이기에 백경을 황경으로 보정해 주려면 최대 $\pm 6.545'$이기에 이 값은 달의 시직경의 0.2정도에 해당하기에 프톨레마이오스는 무시하였다.

지구로부터 달까지의 거리 $\Delta(c, a_v)$는

$$\Delta(c, a_v) = \sqrt{r^2 \sin^2 a_v + (\rho + r\cos a_v)^2} \quad (9\text{-}9)$$

가 된다.

[그림 17]에서 TA를 x축으로 놓으면

$$\overrightarrow{TC} = (\rho\cos c, \rho\sin c) \quad (9\text{-}10)$$
$$\overrightarrow{CP} = \left(r\cos(c - a_v), r\sin(c - a_v)\right) \quad (9\text{-}11)$$

이 된다. 따라서

$$\overrightarrow{TP} = \left(\rho\cos c + r\cos(c-a_v), \rho\sin c + r\sin(c-a_v)\right) \quad (9\text{-}12)$$

이다. 그러므로

$$c - p = \tan^{-1}\left\{\frac{\rho\sin c + r\sin(c-a_v)}{\rho\cos c + r\cos(c-a_v)}\right\} \quad (9\text{-}13)$$

이기에

$$p = c - \tan^{-1}\left\{\frac{\rho\sin c + r\sin(c-a_v)}{\rho\cos c + r\cos(c-a_v)}\right\} = c - \tan^{-1}\left\{\frac{\rho\sin c + r\sin(c-a_m-q)}{\rho\cos c + r\cos(c-a_m-q)}\right\} \quad (9\text{-}14)$$

이다. (9-14)식으로 구한 값과 (9-7)로 구한 값은 같다.

[그림 17]에서 $T\Upsilon$를 x축으로 놓으면

$$\overrightarrow{TC} = \left(\rho\cos(c+\lambda_a), \rho\sin(c+\lambda_a)\right) \quad (9\text{-}15)$$

$$\overrightarrow{CP} = \left(r\cos(c-a_v+\lambda_a), r\sin(c-a_v+\lambda_a)\right) \quad (9\text{-}16)$$

$$\overrightarrow{TD} = \left(e\cos\lambda_a, e\sin\lambda_a\right) \quad (9\text{-}17)$$

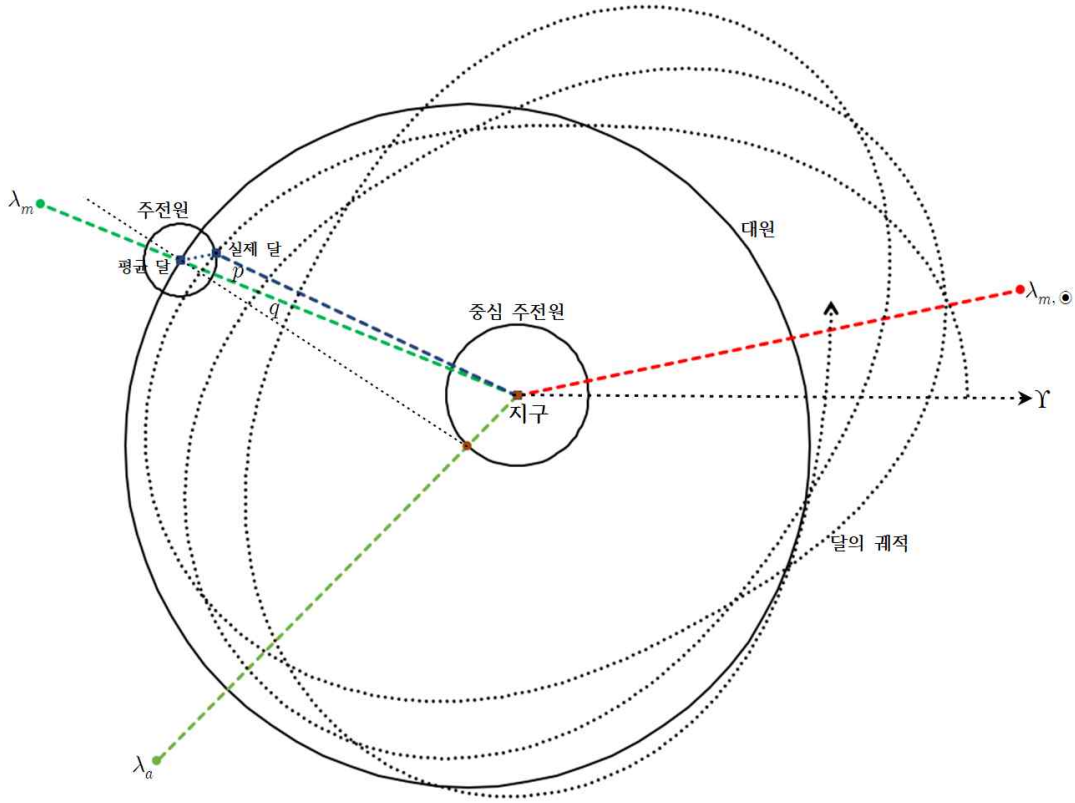
이 된다. 따라서

$$\overrightarrow{TP} = \left(\rho\cos(c+\lambda_a) + r\cos(c-a_v+\lambda_a), \rho\sin(c+\lambda_a) + r\sin(c-a_v+\lambda_a)\right) \quad (9\text{-}18)$$

이 된다. [표 5]는 $\lambda_{m,0} = a_{m,0} = \lambda_{a,o} = \lambda_{m,\odot,0} = 0$이고, $\Delta t = 12$일일 때, 위 식들을 이용하여 계산한 값들이다. 같은 조건을 이용하여 실제 달의 궤적을 [그림 18]에 그려 보았다.

[표 5] 실제 달의 위치 추보

$\Delta t = t - t_0$	12(일)
계산 식	단위: 도
$\lambda_m = \lambda_{m,0} + \omega_t \Delta t$	158.11659
$a_m = a_{m,0} + \omega_a \Delta t$	156.77979
$\lambda_{m,\odot} = \lambda_{m,\odot,0} + \omega_\odot \Delta t$	11.827623
$\lambda_a = 2\lambda_{m,\odot} - \lambda_m$	-134.4613
$c = 2(\lambda_m - \lambda_{m,\odot})$	292.57793
ρ	1.0611714
$q(c)$	-9.539731
a_v	147.24006
$p(c, a_v)$	-3.365586
$\lambda_☽ = \lambda_m + p(c, a_v)$	154.751
$\lambda_☽ - \lambda_{m,\odot}$	142.92338



[그림 18] 프톨레마이오스의 세 번째 모델을 이용한 달의 궤적

이제 실제 달의 운행 각속도 $\dot{\lambda}_{☽}$ 를 구해 보자. (9-8)식을 시간에 대해 미분하면

$$\dot{\lambda}_{☽} = \dot{\lambda}_{m,☽} + \dot{p}(c, a_v) = \omega_t + \dot{p}(c, a_v) \qquad (9\text{-}19)$$

가 된다. 그런데 다음 식들을 순서로 계산하면 $\dot{p}(c, a_v)$를 얻을 수 있다.

$$\dot{c} = 2(\omega_t - \omega_{\odot}) = 2\omega_S \qquad (9\text{-}20\text{-}1)$$

$$\dot{\rho} = -\left(\frac{e^2 \sin c \cos c}{\sqrt{R^2 - e^2 \sin^2}} + e \sin c\right)\dot{c} \qquad (9\text{-}20\text{-}2)$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{\rho} e \sin c - \rho e \dot{c} \cos c - e^2 \dot{c}}{(\rho + e \cos c)^2 + e^2 \sin^2 c} \qquad (9\text{-}20\text{-}3)$$

$$\dot{a}_v = \dot{a}_m + \dot{q} = \omega_a + \dot{q} \qquad (9\text{-}20\text{-}4)$$

$$\dot{p}(c, a_v) = -\frac{\dot{\rho} r \sin a_v - \rho r \dot{a}_v \cos a_v - r^2 \dot{a}_v}{(\rho + r \cos a_v)^2 + r^2 \sin^2 a_v} \qquad (9\text{-}20\text{-}5)$$

10. 달의 황경과 황위

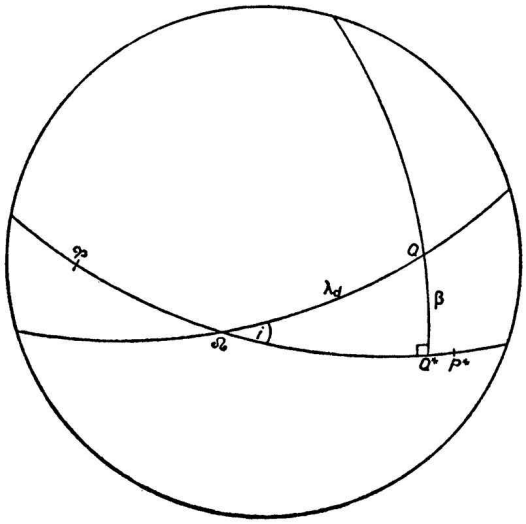
위의 모델을 이용하여 실제 달의 백경 $\lambda_{☽}$을 구하였다. [그림 19]에서 ☊는 승교점을 가리킨다. 승교점의 황경을 λ_n이라하자. 승교점은 대략 하루에 $\omega_d - \omega_t \simeq 0°;3$씩 후퇴한다. 따라서

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(t_0) - (\omega_d - \omega_t)\Delta t \qquad (10\text{-}1)$$

이 된다. [그림 18]의 λ_d는

$$\lambda_d = \lambda_{☽} - \lambda_n \qquad (10\text{-}2)$$

이 된다. 달의 경사각 i는 대략 5°정도이다. 따라서 [그림 18]에서 ☊Q^*가 달의 황경이 되는데 이 값은



[그림 19] 달의 황위 구하기

$$☊Q^* = \tan^{-1}(\tan\lambda_d \cos i) \qquad (10\text{-}3)$$

이 된다. 따라서 백경과 황경의 차이 $\delta\lambda$는

$$\delta\lambda = \lambda_n - \tan^{-1}(\tan\lambda_d \cos i) \simeq \frac{i^2}{4}\sin(2\lambda_d) \qquad (10\text{-}4)$$

가 된다. 최대 차이가 $\frac{i^2}{4} \simeq 0°;6,33$이기에 이 값은 달의 시직경의 0.2정도이기에 무시할 만하다. 황위 β는

$$\beta = \sin^{-1}(\sin\lambda_d \sin i) \simeq i \sin\lambda_d \qquad (10\text{-}5)$$

로 구할 수 있다. 프톨레마이오스는 다음 식들을 이용하여 β를 구하였다.[10)]

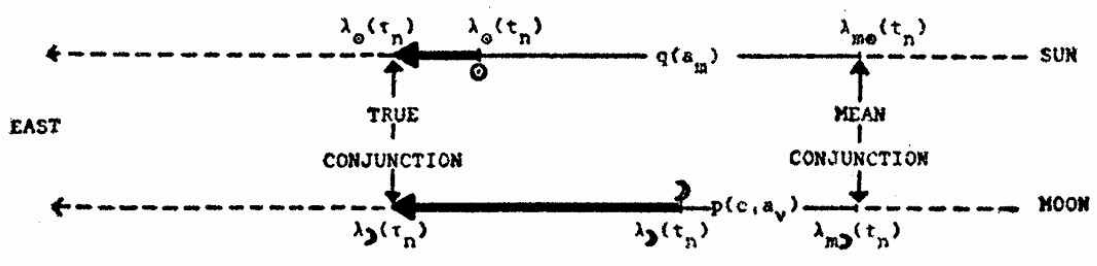
$$\lambda_{m,\beta} = \lambda_{m,\beta}(t_0) + \omega_d \Delta t \qquad (10\text{-}6\text{-}1)$$
$$\lambda_\beta = \lambda_{m,\beta} + p \qquad (10\text{-}6\text{-}2)$$
$$\lambda_d = \lambda_\beta + 90° \qquad (10\text{-}6\text{-}3)$$

여기서 λ_β는 승교점에서 90°떨어진 최상점으로부터 달이 떨어진 위치를 의미한다.

---

10) $\lambda_d = \lambda_\beta + 90° = \lambda_{☽} - \lambda_n = \lambda_m + p - \lambda_n = \lambda_{m,0} + \omega_t \Delta t + p - \lambda_{n,0} + (\omega_d - \omega_t)\Delta t$
$= \lambda_{m,0} - (\lambda_{n,0} + 90°) + \omega_d \Delta t + p + 90° = \lambda_{m,\beta}(t_0) + \omega_d \Delta t + p + 90° = \lambda_{m,\beta} + p + 90°$

11. 실제 합충(syzygy)



[그림 20] 실제 합충 구하기

[그림 20]과 같이 평균 합이 일어나도 실제 합은 아니다. 즉 $\lambda_{m,☽} = \lambda_{m,\odot}$이긴 하지만

$$\lambda_{\odot}(t_n) = \lambda_{m,\odot}(t_n) + q(a_m) \qquad (11\text{-}1)$$
$$\lambda_{☽}(t_n) = \lambda_{m,☽}(t_n) + p(c, a_v) \qquad (11\text{-}2)$$

이기 때문이다. 이제 $\lambda_{\odot}(t_n) > \lambda_{☽}(t_n)$ 경우를 생각해 보자. Δt_n후에

$$\lambda_{\odot}(t_n) + \dot{\lambda}_{\odot}\Delta t_n = \lambda_{☽}(t_n) + \dot{\lambda}_{☽}\Delta t_n \qquad (11\text{-}3)$$

이 되었다고 하자. 그러면

$$\Delta t_n = \frac{\lambda_{\odot}(t_n) - \lambda_{☽}(t_n)}{\dot{\lambda}_{☽} - \dot{\lambda}_{\odot}} \qquad (11\text{-}4)$$

가 된다. 실제 합이 되는 시각 τ_n은

$$\tau_n = t_n + \Delta t_n = t_n + \frac{\lambda_{\odot}(t_n) - \lambda_{☽}(t_n)}{\dot{\lambda}_{☽} - \dot{\lambda}_{\odot}} \qquad (11\text{-}5)$$

이 된다. 그리고 달이 움직인 각도 $\Delta\lambda_{☽}(t_n)$은

$$\Delta\lambda_{☽}(t_n) = \dot{\lambda}_{☽}\Delta t_n = \{\lambda_{\odot}(t_n) - \lambda_{☽}(t_n)\}\frac{\dot{\lambda}_{☽}}{\dot{\lambda}_{☽} - \dot{\lambda}_{\odot}} \qquad (11\text{-}6)$$

이다. 실제 합이 일어난 경도는

$$\lambda(\tau_n) = \lambda_{☽}(t_n) + \Delta\lambda_{☽}(t_n) = \lambda_{☽}(t_n) + \{\lambda_{\odot}(t_n) - \lambda_{☽}(t_n)\}\frac{\dot{\lambda}_{☽}}{\dot{\lambda}_{☽} - \dot{\lambda}_{\odot}} \qquad (11\text{-}7)$$

이 된다.

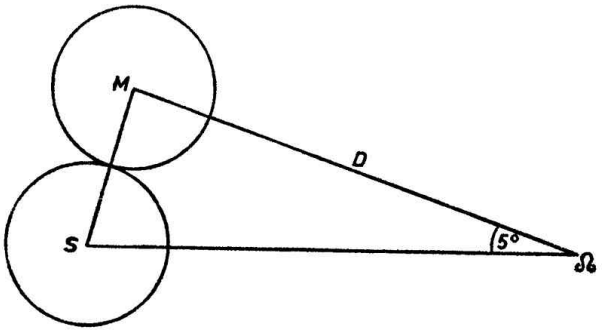
(11-7)식에 $\lambda_{\odot}(t_n)-\lambda_{☽}(t_n)$가 있다. (11-1, 2)식에 의하여 이는 $q(a_m)-p(c,a_v)$이다. 이 값의 최대는 7°;24이다. 그런데 달은 태양보다 13배 정도 더 빠르기에 달이 7°;24를 가면 태양은 0°;34,9를 더 간다. 달이 이 만큼을 더 가면 태양은 0°;2,38를 더 간다. 결국 달은 $7°;24/(1-1/13)=7°;24(1+1/12)=8°;01$간다. (11-6)을 다시 쓰면

$$\Delta\lambda_{☽}(t_n)=\{\lambda_{\odot}(t_n)-\lambda_{☽}(t_n)\}+\{\lambda_{\odot}(t_n)-\lambda_{☽}(t_n)\}\frac{\dot{\lambda}_{\odot}}{\dot{\lambda}_{☽}-\dot{\lambda}_{\odot}} \qquad (11\text{-}8)$$

이 되는데 $\frac{\dot{\lambda}_{\odot}}{\dot{\lambda}_{☽}-\dot{\lambda}_{\odot}}\approx\frac{\omega_{\odot}}{\omega_{☽}-\omega_{\odot}}\simeq\frac{1}{12}$이 된다. 프톨레마이오스는 이 어림을 사용했다. 이 어림 대신에 (8-4), (9-19)를 계산해서 사용하면 정확한 값을 얻을 수 있다.

12. 일식의 등급

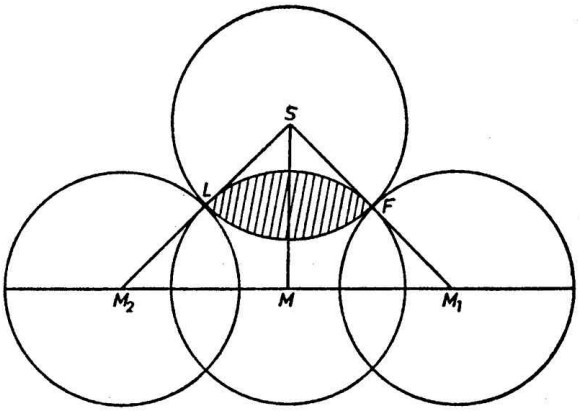
일식의 등급 d는 달과 태양이 [그림 21]과 같이 접촉하여 있으면 0이고, 달과 태양을 완전히 가리면 즉 $MS=0$이면 12가 된다. 따라서 d는 [그림 21]에서 각거리 D와 관련이 크다. 물론 달까지의 거리 Δ에 따라 달의 시직경이 변하긴하지만 그 변화가 그리 크지 않다. 달까지의 거리가 최대일 때 즉 $\Delta_1=R+e+r$의 경우, 달의 시직경은 가장 작으며 태양과 거의 비슷한 0°;15,40이다. [그림 21]에서 $MS=0°;31,20$이고 달과 태양이 접촉해 있다. 이 순간에 일식의 등급은 $d=0$이고, $M☊=D=0°;31,20\times cot\,5°\simeq 6°$이다. 일반적으로 D와 d의관계는



[그림 21] 일식의 순간

$$D=6°\times\left(1-\frac{d}{12}\right) \qquad (12\text{-}1)$$

이다. [그림 22]와 같이 일식이 진행하면 $M_1S=0°;31,20$이기에 $MS=0°;31,20\left(1-\frac{d}{12}\right)$이기에



[그림 22] 일식의 진행

$$M_1M=\frac{0°;31,20}{12}\sqrt{d(24-d)} \qquad (12\text{-}2)$$

이다. 그리고 $M_1M=MM_2$이고, 태양의 움직임을 고려하면, 일식이 진행되는 시간은 대략

$$2M_1M\left(1+\frac{1}{12}\right)/\dot{\lambda}_{☽} \quad (12\text{-}3)$$

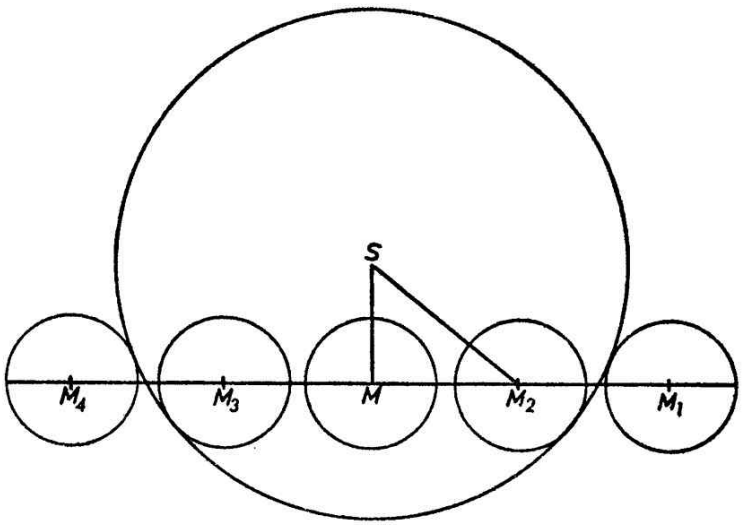
이 된다. $d=12$일 때, $M_1M=0°;31,20$이기에 $\dot{\lambda}_{☽} \simeq \omega_t$를 시용하여 (12-3)식에서 일식이 진행되는 시간은 대략 2시간 정도이다. 이 시간이 거의 일식의 최대 시간이다.

달까지의 거리가 최소가 되면 달의 시직경은 최대가 되어 $0°;35,20$가 된다. 따라서

$$0°;35,20 \times \frac{12}{0°;31,20} = 13.532 \text{ 등급} \quad (12\text{-}4)$$

이기에 등급 12부터 13,532까지 개기월식이 진행된다. 달의 중심과 태양의 중심이 만날 때는 12.766등급일 때이다.

13. 월식



[그림 23] 월식의 진행

일반적으로 지구 그림자의 시반경은 달 시반경의 2.6배정도이다. M_1을 첫 번째 접촉, M_2를 개기식의 시작, M_3를 식심, M_4를 개기식의 마지막, M_5를 마지막 접촉이라 한다. 이제 달의 시반경을 1이라 하면 [그림 23]에서 $M_1S=3.6$, $M_2S=1.6$이다 만약 월식의 등급도 d라 정의하고, 12등급을 최대라 하자. 그러면 $MS=3.6\left(1-\frac{d}{12}\right)$이 된다. 따라서

$$M_1M=\frac{0.9}{3}\sqrt{d(24-d)} \quad (13\text{-}1)$$

$$M_2M=0.1\sqrt{(3d-20))(52-3d)} \quad (13\text{-}2)$$

가 된다. M_2와 M_3가 존재하려면 $d > \frac{20}{3}$이어야 한다. $\dot{\lambda}_{☽} \simeq \omega_t$를 시용하여 월식 및 개기월식의 진행 시간은 각각

$$2M_1M\left(1+\frac{1}{12}\right)\times\frac{0°;31,20}{\dot{\lambda}_{☽}} \qquad (13\text{-}3)$$

$$2M_2M\left(1+\frac{1}{12}\right)\times\frac{0°;31,20}{\dot{\lambda}_{☽}} \qquad (13\text{-}4)$$

가 된다. $d=12$일 때, 월식 시간은 $7^h;25$이고, 개기식 시간은 $3^h;18$정도이다.